# 浙江工商大学 2019 年全国硕士研究生入学考试试卷（A）卷

考试科目：846 高等代数　　总分：（150 分）　　考试时间：3 小时

说明：本试卷中，用 $\Re$ 表示实数集，$rank(A)$ 表示矩阵的秩，上标“$T$”表示向量或矩阵的转置。

## 一、计算题（共 75 分）

1.（20 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

（I）计算行列式 $|A|$；

（II）当实数 $a$ 取何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解。

2.（15 分）设 $\Re^{2\times 2}$ 上的变换 $T$ 定义为 $T(X)=MX-XM$，其中 $M=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，$X$ 是 $\Re^{2\times 2}$ 中任意矩阵。

（I）验证 $T$ 是 $\Re^{2\times 2}$ 上的线性变换；

（II）求 $T$ 在基 $E_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 下的矩阵。

3.（20 分）（I）求线性空间 $P[x]_3$ 中从基 $(a)$：$1,(x-1),(x-1)^2$ 到基 $(b)$：$1,(x+1),(x+1)^2$ 的过渡矩阵；

（II）求线性空间 $P[x]_3$ 中向量 $f(x)=1-2x+3x^2$ 在基 $(a)$：$1,(x-1),(x-1)^2$ 下的坐标。

4.（20 分）已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2。

（I）求实数 $a$ 的值；

（II）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f$ 化为标准形。

二、证明题（共75分）

1.（10分）证明：如果$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个组合，那么$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

2.（15分）设$A \in \Re^{n\times m}$，$B \in \Re^{m\times n}$，已知$I_m - BA$是可逆矩阵，证明$I_n - AB$也可逆，并求出它的逆。

3.（20分）设$P^3$的两个子空间分别为 $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$，

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - x_2 - x_3 = 0\}。$$

证明：（I）$P^3 = W_1 + W_2$；

（II）$W_1 + W_2$不是直和。

4.（20分）设$A$为$n$阶方阵，满足$A^2 = A$，

证明：（I）$r(A) + r(A-E) = n$

（II）$r(A^k) + r[(A-E)^l] = n$，这里$k, l$为任意自然数。

5.（10分）设矩阵$A \in \Re^{m\times n}(m \geq n)$，$rank(A) = n$，证明存在列正交的矩阵$Q$和上三角矩阵$R$使得$A = QR$并由此给出最小二乘解$\min\limits_x \|Ax - b\|_2$。