

浙江工商大学 2018 年全国硕士研究生入学考试试卷 (B) 卷

考试科目: 601 数学分析

总分: (150 分)

考试时间: 3 小时

一、计算题 (每小题 10 分, 共 90 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

2. 叙述函数 $y = f(x)$ 连续的定义, 并讨论函数 $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的连续性.

3. 设 $f(x)$ 是 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

求该函数的傅里叶展开式, 并由此求级数和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

4. 利用弧长公式 $s = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$ 计算悬链线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=10$ 那一段的弧长.

5. 计算定积分 (1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, 并说明该积分的几何意义; (2) 计算定积分 $\int_0^e x^2 \ln x dx$.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间及和函数.

7. 叙述二元函数偏导数的定义, 并计算 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点处的二个偏导数, 进而说明在原点处的可微性.

8. 计算 $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $2(x^2 + y^2) = z$ 与 $z = 4$ 所围成的区域.

9. 利用格林公式计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为任一不包含原点的逆时针光滑无自交闭

曲线. 再问若 L 包含原点呢?

二、证明题 (每小题 15 分, 共 60 分)

1. 证明不等式 $e^x > 1+x$, $x \neq 0$.

2. 证明收敛数列的有界性.

3. 证明函数列 $f_n(x) = x^n$ 在 $(0,1)$ 上非一致收敛.

4. (1) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有无穷个点的函数值大于零且可积, 证明或否定

$$\int_a^b f(x)dx > 0;$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $\int_a^b f(x)dx > 0$, 证明或否定存在区间 $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$,

使 $f(x) > 0$, $x \in [\alpha, \beta]$.