# 浙江工商大学 2019 年博士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目及代码：概率论与数理统计（3123）

考试时间：3 小时　　总分：100 分

一、(本题 15 分) 假设 $N=\{N_t,t\ge 0\}$ 是强度参数为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，适应于流 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t,t\ge 0\}$，又设 $X_n(n\ge 1)$ 为第 n-1 次与第 n 事件发生的时间间隔。

1、试证随机过程 $(N_t-\lambda t)^2-\lambda t,t\ge 0$ 是一个鞅；

2、假设 $t\ge s>0$，试求概率

$$P(X_1\le s\mid N_t=1).$$

二、(本题 15 分) 设 $B^{(i)}=\{B_t^{(i)},t\ge 0\}$ 表示两个相互独立的 Brown 运动（$i=1,2$），且过程 $\{X_t,t\ge 0\}$ 满足如下微分方程

$$X_t=X_0+\int_0^t X_s ds+\int_0^t X_s dB_s^{(1)}+\int_0^t X_s dB_s^{(2)},$$

(1)试叙述相应的 Ito 公式；(2) 用该 Ito 公式求随机微分方程的解。

三、(本题 10 分) 某物品成箱出售，每箱 20 件，假设各箱中含 0 件、1 件次品的概率分别为 0.8 和 0.2，一顾客在购买时，他可以开箱任取三件检查，当这三件都是合格品时，顾客才买下该箱物品，否则退货。试求：(1) 顾客买下该箱物品的概率 $\alpha$；(2) 现顾客买下该箱物品，问该箱确无次品的概率 $\beta$。

四、(本题 15 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=ae^{-|x|}$ $(-\infty<x<\infty)$，试求出：(1) 常数 $a$；(2) X 的分布函数；(3) X 的数学期望与方差。

五、(本题 10 分) 一系统是由 $n$ 个相互独立起作用的部件组成，每个部件正常工作的概率为 0.9，且必须至少由 80%的部件正常工作，系统才能正常工作，问 $n$ 至少为多大时，才能使系统正常工作的概率不低于 0.95？（已知 $\Phi(1.96)=0.975$）。

六、(本题 15 分) 设总体 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本，(1) 求 Fisher 信息量 $I(\lambda)$；(2) 求参数 $\lambda$ 的充分完备统计量；(3)求参数 $\theta=\lambda^2$ 的一致最小方差无偏估计 $\hat{\theta}$。

七、(本题 10 分) 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本，(1)求检验

$H_0:\sigma=\sigma_0$ v.s. $H_1:\sigma=\sigma_1\ (>\sigma_0)$ 的显著性水平是 $\alpha$ 的最大功效检验；(2)求所得检验犯第二类错误的概率。

八、（本题 **10** 分）设总体 $X$ 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是其对应的观察值。假定参数 $\lambda$ 的先验分布是 Gamma 分布 $\text{gamma}(\alpha,\beta)$，其密度函数为

$$g(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda},\lambda>0。$$

(1)求参数 $\lambda$ 的后验密度函数 $f(\lambda\mid x_1,\cdots,x_n)$；(2)若 $\tilde{x}$ 是总体的一个新观察值，求 $\tilde{x}$ 的后验预测密度函数 $f(\tilde{x}\mid x_1,\cdots,x_n)$.