浙江工商大学 2021 年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目：813 概率论与数理统计　　总分：（150 分）　考试时间：3 小时

1.（15 分）已知 X 和 Y 服从同一分布，且 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

若已知 $P(XY=0)=1$，求

(1) X 和 Y 的联合分布律；（10 分）

(2) 在 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律。(5 分)

2.（20 分）设 $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$，$Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$，且它们相互独立，令 $U = X+Y$，

$V=\dfrac{X}{X+Y}$，证明 U,V 相互独立。已知 $Gamma(\alpha,\lambda)$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}。$$

3.（20 分）利用特征函数方法证明如下的泊松定理：设有一列二项式分布

$b(k,n,p_n)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty} b(k,n,p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots.$$

4.（20 分）设 X_1，$X_2,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且方差存在。随机变量 N 只取正整数值，方差存在，并且 N 与 $\{X_n\}$ 独立。证明

(1) $E\left(\sum\limits_{i=1}^{N}X_i\right)=E(X_1)E(N)$；　（10 分）

(2) $Var\left(\sum\limits_{i=1}^{N}X_i\right)=Var(N)\left[E(X_1)\right]^2+E(N)Var(X_1)$。(10 分)

5.（15 分）某市为了解市民对某项政策的态度，现调查了 500 人，发现有 400 人持赞成态度，求当置信水平是 0.95 时该市这项政策赞成率的置信区间。设 p_0 是这项政策的实际赞成率，为使赞成率的估计值与其实际值相差不超过 0.1 的概率至少是 0.95，则至少应该调查多少

人？（已知 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数）

6.（20 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一组等均值和等方差的随机变量，其均值和方差分别为 μ 和 σ^2，X_i 与 X_j 不独立，且相关系数 $Corr(X_i, X_j)=\rho$。令 $Q=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

(1) 求 $E(Q)$；（10 分）

(2) 若 $A=a\sum_{i=1}^{n}X_i^2+b\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$ 为 σ^2 的一个无偏估计，求 a 和 b。（10 分）

7.（20 分）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自威布尔分布 $W(\omega,\varphi)$（$\omega>0,\varphi>0$）的一个样本，其中威布尔分布 $W(\omega,\varphi)$ 的概率密度函数为

$$f(x;\omega,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{\omega}{\varphi}\left(\dfrac{x}{\varphi}\right)^{\omega-1}\exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\varphi}\right)^{\omega}\right\}, x\geq 0\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

求参数 ω 和 φ 的极大似然估计。

8.（20 分）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $U(0,\theta)$ 的一个样本，其中 $\theta>0$，对如下的检验问题：

$$H_0:\theta=\frac{1}{2} \quad vs \quad H_1:\theta=\frac{2}{3},$$

已给出拒绝域 $W=\{x_{(n)}\geq c\}$，其中 $x_{(n)}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为样本的最大次序统计量。

(1) 若要求检验犯第一类错误概率不超过 0.05（即 $\alpha\leq 0.05$），c 至少取多大？（10 分）

(2) 在 (1) 的结果下，求出检验犯第二类错误的概率 β。（10 分）