浙江工商大学 2021 年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目：601 数学分析　　总分：（150 分）　　考试时间：3 小时

一、计算题（每小题 10 分，共 90 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x^2)}$.

2. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性，其中 m 为非零自然数.

3. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t+\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z^2=xy-9$ 下的极值.

5. 计算定积分(1) $\int_{-1}^{1}\dfrac{\sin x\cos x+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2)计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2+2x+x^2}\mathrm{d}x$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的收敛域及其和函数 $S(x)$.

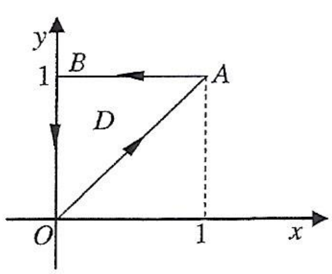
7. 求由圆柱 $x^2+y^2=9$ 与平面 $z=1,x+z=5$ 所围成的物体 K 的体积.

8. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x<\pi \\ -\sin x, & -\pi\le x<0 \end{cases},$$

求该函数的傅里叶展开式.

9. 计算 $I=\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是从点 $O(0,0),A(1,1),B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.



答案写在答题纸上，写在试卷上无效

二、证明题（每小题15分，共60分）

1．设数列 $\{a_n\}$ 是非负且单调递增的，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，试证明：

$$\lim_{n\to\infty}[a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n]^{\frac{1}{n}} = a$$

2．证明函数 $f(x) = \sum \dfrac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且有连续的导函数.

3．设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上具有连续导数，且满足 $f(1) = 1$ 和

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + [f(x)]^2},\quad 1 \le x < +\infty,$$

试证明：当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在，且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

4．证明：若 $u_n(x) \in C[a,b], n = 1,2,\ldots,$ 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散，那么函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不是一致收敛的.

答案写在答题纸上，写在试卷上无效