浙江工商大学 2021 年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目： 846 高等代数 总分：（150 分） 考试时间：3 小时

一、计算题（共 75 分）

1.（15 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$.

2.（20 分）设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$ 是由 α_1,α_2 生成的子空间，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$ 是由 β_1,β_2 生成的子空间，其中：$\begin{cases}\alpha_1=(1,0,1)\\ \alpha_2=(0,1,1)\end{cases}$，$\begin{cases}\beta_1=(2,2,4)\\ \beta_2=(1,1,1)\end{cases}$，求子空间 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

3.（20 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 τ 在这组基下的矩阵

为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，求 τ 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4$，

$\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵，并且求 τ 的值域与核.

4.（20 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，用正交变换将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换对应的正交矩阵.

二、证明题（共 75 分）

1.（15 分）证明：如果 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，那么 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

2.（20 分）证明：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，且表示法唯一.

3.（20 分）证明：秩$(A+B)\le$秩$(A)+$秩(B).

4. (20 分) 设 U 是一个正交矩阵, 证明: 如果 λ 是 U 的一个特征值, 那么 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 U 的一个特征值.