浙江工商大学2020年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目：813 概率论与数理统计　　总分：（150分）考试时间：3小时

1.（15分）已知 X,Y 同分布，$P(X=0)=\frac{1}{3}, P(X=1)=\frac{2}{3}, P(XY=0)=\frac{1}{3}$，求 $P(X=Y)$。

2.（15分）设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，且 $F(x)$ 是严格单调的连续函数，令 $Y=F(X)$。证明 Y 服从(0, 1)上的均匀分布。

3.（20分）设 $\{X_k\}$ 为独立随机变量序列，且 $P(X_1=0)=1$,

$$P(X_n=\pm\sqrt{n})=\frac{1}{n}, P(X_n=0)=1-\frac{2}{n}, n=2,3,\cdots$$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律。

4.（20分）设随机变量 $X\sim Ga(a,\lambda)$，利用特征函数方法证明：当 $a\to\infty$ 时，随机变量 $(\lambda X-a)/\sqrt{a}$ 按分布收敛于标准正态变量。

已知 $Gamma(\alpha,\lambda)$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$。

5.（20分）设 X 的密度为 $f(x)$，作检验 $H_0: f_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其它。\end{cases}$，

$H_1: f_2(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & 其它。\end{cases}$，抽取一个样本 X，其拒绝域为 $W=\{X>1/2\}$，求第一类错误的概率 α，和第二类错误的概率 β。

6.（20分）假设总体 X 的密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta;\\ 0, & 其它,\end{cases}$，其中 θ 为参数，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。(1)求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2)求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$；(3) $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的一致估计，并给予证明。

7.（20分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$ 的样本，试求 θ 的矩估计和极大似然估计，并判断它们是否为无偏估计，是否为相合估计？

8.（20分）设总体 X 服从指数分布，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，$\theta>0$ 为未知的，

$X_1,\cdots,X_n$来自总体X的样本，若$\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\theta}\sim\chi^2(2n)$，

(1)求θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间； (10分)

(2) 若某电子元件的寿命（单位：h）服从上述指数分布，先从中抽取容量为16的样本，测得样本均值为6000(h)，在显著性水平为0.1下检验θ是否为5000？（$\chi^2_{0.05}(32)=46.194,\chi^2_{0.95}(32)=20.072$） (10分)