浙江工商大学 2020 年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目： 846 高等代数　　总分：（150 分）　　考试时间：3 小时

一、计算题（共 75 分）

1.（15 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}$ 的值，其中 $b_2,\cdots,b_n \neq 0$.

2.（20 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,-2), \alpha_2=(3,1,1,1), \alpha_3=(-1,0,1,-1)$ 及 $\beta_1=(2,5,-6,-5)$，

$\beta_2=(-1,2,-7,3)$. 令子空间 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 及 $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的维数和基.

3.（20 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维空间的一组基，已知线性变换 σ 在这组基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 σ 在基 $\eta_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3, \eta_2=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3, \eta_3=3\varepsilon_1+\varepsilon_3$ 下的矩阵（8 分）.

(2) 求 σ 的核和值域（12 分）.

4.（20 分）用正交线性替换化二次型 $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形.

二、证明题 （共 75 分）

1、（15 分）证明：如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式（$k\geq 1$），那么它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

2.（20 分）设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B 使得 $AB=O$ 的充分必要条件是 $|A|=0$.

3.（20 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$; $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3.

证明：$\max\{r_1,r_2\}\leq r_3\leq r_1+r_2$

4.（20 分）欧式空间 V 中的线性变换 φ 称为反对称的，如果对于任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $(\varphi\alpha,\beta)=-(\alpha,\varphi\beta)$.

证明：(1) φ 为反对称的充分必要条件是 φ 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的（10 分）.

(2) 如果 V_1 是反对称线性变换 φ 的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 φ 的不变子空间（10 分）.