# 浙江工商大学 2020 年全国硕士研究生入学考试试卷（A）卷

**考试科目：601 数学分析　　总分：（150 分）　　考试时间：3 小时**

**一、计算题（每小题 10 分，共 90 分）**

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3})$.

2. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{3x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处连续，求 $a$.

3. 计算 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处的二个偏导数，进而说明在原点处的可微性。

4. 抛物面 $x^2+y^2=z$ 被平面 $x+y+z=1$ 的截成一个椭圆，求这个椭圆到原点的最长与最短距离。

5. 计算不定积分(1) $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$；　(2)计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域及其和函数 $S(x)$

7. 计算 $\iint\limits_S \dfrac{ds}{z}$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$z=h\left(0<h<1\right)$所截顶部.

8. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{12}\left(3x^2-6\pi x+2\pi^2\right)$, $0<x<2\pi$ 展开为傅立叶级数，并推出

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots.$$

9. 验证积分 $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \dfrac{ydx-xdy}{x^2}$ 与路径无关（沿在右半平面的路线），并求它的值.

**二、证明题（每小题 15 分，共 60 分）**

1. 证明不等式 $0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1 \quad (x>0)$.

2. 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{4}(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}), (n=1,2,\cdots)$，证明此数列极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

答案写在答题纸上，写在试卷上无效

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge(b-a)^2.$$

4.（1）若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛，举例说明 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 不一定收敛；

（2）若再加条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛。